

НЕФТЕГАЗОВЫЙ ИНЖИНИРИНГ

В. Г. ЛЕВИЧ

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА



Оглавление

О профессоре В. Г. Левиче	ix
От редакционного совета серии	xvii
Предисловие ко второму изданию	xix
Из предисловия к первому изданию	xx
ГЛАВА I. Введение	1
§ 1. Уравнения гидродинамики	1
§ 2. Подобие гидродинамических явлений	6
§ 3. Движение жидкости при больших числах Рейнольдса. Пограничный слой	8
§ 4. Турбулентное движение жидкости	20
§ 5. Обтекание тела, имеющего значительную кривизну	33
Литература	36
ГЛАВА II. Конвективная диффузия в жидкостях	37
§ 6. Диффузионная кинетика	37
§ 7. Общие данные о диффузионной кинетике в жидкостях	38
§ 8. Конвективная диффузия в жидкостях	43
§ 9. Граничные условия для уравнения конвективной диффузии	51
§ 10. Общая теория конвективной диффузии в жидкостях	54
§ 11. Решение уравнения конвективной диффузии к поверхности вращающегося диска	58
§ 12. Смешанная кинетика на поверхности вращающегося диска. Метод равнодоступной поверхности	69
§ 13. Сведение уравнения конвективной диффузии к уравнению типа уравнения теплопроводности	75
§ 14. Диффузия к падающей твердой частице	77
§ 15. Диффузионный поток на поверхность обтекаемой пластинки	84
§ 16. Аналогия между конвективной диффузией и поверхностным трением	88
§ 17. Решение уравнения конвективной диффузии для пластинки при смешанной кинетике	90
§ 18. Релаксация диффузионного процесса	98
§ 19. Моделирование гетерогенных химических реакций	105

§ 20. Внутренняя задача: диффузия в ламинарном потоке, текущем в трубе	108
§ 21. Распределение вещества, введенного в текущий поток жидкости	113
§ 22. Конвективная диффузия в двойной жидкой системе в критической области	116
§ 23. Диффузионный поток при естественной конвекции. Случай вертикальной пластинки	123
Литература	132
ГЛАВА III. Диффузионная кинетика при турбулентном течении жидкости	135
§ 24. Общие закономерности переноса субстанций в турбулентном потоке	135
§ 25. Диффузионный поток	140
§ 26. Диффузионный поток на внутренность трубы и на поверхность пластинки	150
§ 27. Диффузионный поток на вращающийся диск	153
§ 28. Диффузионный поток к поверхности тела необтекаемой формы	155
§ 29. Диффузионный поток на шероховатую поверхность при ламинарном течении. Растворение тела вблизи угла	158
§ 30. Диффузионный поток на шероховатую поверхность при турбулентном течении вблизи поверхности	162
§ 31. Об аналогии между конвективной диффузией и поверхностным трением при турбулентном режиме течения жидкости	167
§ 32. Движение частиц, взвешенных в турбулентном потоке	170
§ 33. Диффузия к частицам, взвешенным в турбулентном потоке. Элементарный акт процесса экстрагирования	172
Литература	179
ГЛАВА IV. Теплопередача в жидкостях	181
§ 34. Теплопередача в жидкостях	181
§ 35. Простейшие задачи конвективной теплопередачи	185
§ 36. Теплопередача в турбулентном потоке	191
§ 37. Теория конвективной теплопередачи в жидких металлах	193
§ 38. Общая интерполяционная формула для потока тепла в жидкости при любых значениях числа Прандтля	200
Литература	202
ГЛАВА V. Некоторые вопросы теории коагуляции дисперсных систем в движущихся жидкостях и газах	203
§ 39. Теория Смолуховского	203
§ 40. Градиентная коагуляция	207
§ 41. Теория коагуляции коллоидов в турбулентном потоке жидкости	209

§ 42. Второй механизм коагуляции частиц аэрозоля в турбулентном потоке	215
§ 43. Осаждение аэрозолей и коллоидов	217
Литература	225
ГЛАВА VI. Прохождение токов через растворы электролитов	227
§ 44. Квазиравновесное состояние электролитической ячейки	227
§ 45. Ток в электролитической ячейке	232
§ 46. Концентрационное перенапряжение	238
§ 47. Химическое перенапряжение. Перенапряжение водорода	246
§ 48. Сравнение различных факторов, определяющих величину тока в ячейке	253
§ 49. Распределение тока в электролитической ячейке в отсутствие концентрационного перенапряжения	256
§ 50. Прохождение тока через размешиваемый электролит	273
§ 51. Ток в бинарном электролите	275
§ 52. Теория дискового электрода в бинарном электролите	280
§ 53. Ток в присутствии постороннего электролита	286
§ 54. Диффузионный ток на поверхность дискового электрода и пластинки при наличии постороннего электролита	290
§ 55. Сравнение теории с опытом	294
§ 56. Количественная проверка теории. Ламинарный режим движения жидкости	299
§ 57. Количественная проверка теории. Турбулентный режим движения жидкости	310
§ 58. Приложения теории конвективной диффузии к решению электрохимических задач	316
§ 59. Растворение однородных металлов в кислотах. Растворение включений	329
§ 60. Применение вращающегося дискового электрода к изучению кинетических и каталитических процессов в электрохимии	337
§ 61. Нестационарная конвективная диффузия. Время установления стационарного режима	349
§ 62. Случай заданной концентрации у поверхности	350
§ 63. Установление режима при заданной плотности тока	355
Литература	359
ГЛАВА VII. Капиллярное движение	363
§ 64. Поверхностный слой	363
§ 65. Условия равновесия между двумя неподвижными жидкими фазами	364
§ 66. Капиллярное движение	371
§ 67. Скорость капиллярного поднятия	373

§ 68. Термокапиллярное движение	374
§ 69. Влияние поверхностно-активных веществ (ПАВ) на движение жидкости	380
Литература	384
ГЛАВА VIII. Движение капель и пузырьков в жидкой среде	385
§ 70. Движение капель жидкости в жидких средах	385
§ 71. Сравнение формулы Рыбчинского – Адамара с опытными данными	391
§ 72. Диффузионный поток на движущуюся каплю	393
§ 73. Падение капель в жидких средах в присутствии поверхностно-активных веществ	398
§ 74. Падение капли в присутствии поверхностно-активного вещества, скорость подачи которого определяется адсорбцией	402
§ 75. Падение капли в присутствии поверхностно-активных веществ, скорость подачи которых определяется процессами объемной и поверхностной диффузии	405
§ 76. Сопоставление различных теорий	409
§ 77. Сравнение различных механизмов торможения	412
§ 78. Границы применимости теории	415
§ 79. Движение капель больших размеров	418
§ 80. Движение и растворение газовых пузырьков в жидкости	421
§ 81. Движение весьма малых пузырьков	423
§ 82. Движение пузырьков умеренных размеров	425
§ 83. Экспериментальная проверка теоретической формулы для скорости движения пузырька в жидкой среде	437
§ 84. Движение пузырьков больших размеров	439
§ 85. Дробление пузырьков	442
§ 86. Дробление капель	443
§ 87. Дробление капель в турбулентном потоке жидкости	446
§ 88. Дробление капель в турбулентном потоке жидкости у стенок	449
§ 89. Дробление капель в турбулентном потоке газа и дробление пузырьков	453
§ 90. Растворение пузырьков газа. Теория элементарного акта процесса барботажа	454
§ 91. Вычисление скорости растворения газа из пузырьков	455
§ 92. Растворение газового пузырька, взвешенного в турбулентном потоке жидкости	458
Литература	459
ГЛАВА IX. Движение частиц в растворах электролитов	461
§ 93. Электрокинетические явления	461

§ 94. Электрофоретическое движение у плоской поверхности (электроосмос)	462
§ 95. Электрофорез твердых диэлектрических частиц	464
§ 96. Электрофорез идеально поляризующихся металлических частиц. Расчет сил для случая диффузного двойного слоя	470
§ 97. Электрофорез идеально поляризующихся металлических частиц. Расчет сил для случая гельмгольцевского двойного слоя	473
§ 98. Электрокапиллярные движения ртутных капель в электрическом поле	479
§ 99. Движение жидких металлических капель в электрическом поле	481
§ 100. Движение неидеально поляризующихся капель в электрическом поле	494
§ 101. Сравнение теории с опытом	497
§ 102. Падение ртутных капель и капель эмульсий в поле тяжести	500
§ 103. Потенциалы падающих капель	507
§ 104. Влияние магнитного поля на падение ртутных капель	513
Литература	518
ГЛАВА X. Теория полярографического метода	519
§ 105. Полярографический метод	519
§ 106. Режим движения жидкости в висящей ртутной капле	521
§ 107. Диффузионный ток на капельный ртутный электрод при наличии добавки постороннего электролита. Случай обратимых реакций	525
§ 108. Поправки к формуле для диффузионного тока на капельный электрод: учет кривизны поверхности и неравномерности вытекания жидкости	532
§ 109. Диффузионный ток на капельный ртутный электрод при наличии добавки постороннего электролита. Случай необратимых процессов	536
§ 110. Ток на капельный ртутный электрод в бинарном растворе электролита	543
§ 111. Полярографические максимумы	548
§ 112. Полярографические максимумы 2-го рода	550
§ 113. Полярографические максимумы 1-го рода	554
§ 114. Максимумы на положительной и отрицательной ветвях электрокапиллярной кривой	565
§ 115. Подавление полярографических максимумов и некоторые практические приложения	569
Литература	576
ГЛАВА XI. Волны на поверхности жидкости	579
§ 116. Волны на поверхности идеальной жидкости	579
§ 117. Волны на поверхности вязкой жидкости	587

§ 118. Волновое движение на поверхности маловязкой жидкости	591
§ 119. Волновое движение на поверхности весьма вязкой жидкости	595
§ 120. Влияние поверхностно-активных веществ на волновое движение жидкости	596
§ 121. Гашение капиллярных волн поверхностно-активными веществами	598
§ 122. Гашение волн растворимыми поверхностно-активными веществами	608
§ 123. Распад жидкой струи при малых скоростях движения. Случай симметричных деформаций	614
§ 124. Распад жидкой струи при малых скоростях движения. Случай произвольных деформаций	622
§ 125. Распад струи при больших скоростях. Распыл	626
§ 126. Распад струи при больших скоростях. Случай длинных волн	633
§ 127. Распад массы жидкости произвольной формы. Заключительные замечания	637
§ 128. Капиллярные волны на поверхности капли	640
§ 129. Возбуждение волн на плоской поверхности жидкости	642
§ 130. Возбуждение ветровых волн большой амплитуды на поверхности глубокой жидкости и затухание их из-за турбулентного трения	646
Литература	654
ГЛАВА XII. Движение и диффузия в тонких пленках жидкости	655
§ 131. Течение тонких пленок жидкости	655
§ 132. Метод «сдувания» тонких пленок жидкости	658
§ 133. Толщина пленки, остающейся на поверхности тела, извлекаемого из неподвижной жидкости	660
§ 134. Волновое течение тонких слоев жидкости	670
§ 135. Турбулентное движение в пленке	676
§ 136. Растворение газа на границе раздела «жидкость – газ» в условиях пленочного течения. Элементарный акт скрубберного процесса	679
Литература	685

Предисловие ко второму изданию

Во втором издании (первое издание вышло в 1952 г.) в книгу включены новые разделы: теория теплопередачи в жидкостях, теория движения и дробления капель, струй и пузырьков и др. В книге рассматриваются ряд новых случаев конвективной диффузии и другие вопросы, разработанные на основе трудов автора и его сотрудников и частично публикуемые здесь впервые. Кроме того, в книге дан краткий обзор многочисленных экспериментальных работ, отечественных и зарубежных, в которых теория конвективного переноса вещества в жидкостях, развитая автором, подверглась опытной проверке.

Новые оригинальные работы, освещенные в книге, проводились в Институте электрохимии АН СССР и на кафедре теоретической физики Московского инженерно-физического института. Экспериментальные работы проводились на кафедре электрохимии Московского государственного университета и в Институте электрохимии АН СССР.

Я хотел бы вновь выразить глубокую благодарность академику А. Н. Фрумкину как за многочисленные и весьма ценные для меня обсуждения и советы, так и за постановку экспериментальных исследований в указанных организациях.

Я выражаю глубокую благодарность академику Л. Д. Ландау за весьма ценные советы.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить д-ра З. Грабовского (Варшава), д-ра Я. Коутецкого (Прага), д-ра Дж. Эйгара (Кембридж), канд. хим. наук И. А. Багоцкую, проф. Б. Н. Кабанова, проф. С. С. Кутателадзе, канд. физ.-матем. наук А. М. Розена, д-ра хим. наук И. Л. Розенфельда, д-ра хим. наук Г. Л. Натансона, проф. Н. А. Фукса за дискуссию и существенные замечания, учтенные мной во втором издании книги.

Мне хочется поблагодарить канд. хим. наук Э. А. Айказяна, Г. Л. Видович, Ю. Б. Плескова, В. Д. Юхтанову, канд. хим. наук А. И. Федорову, доц. В. П. Галушко (Днепропетровский университет), проф. Я. В. Дурдина и канд. хим. наук З. У. Духнякову (Ленинградский университет), проф. И. Р. Кричевского и канд. хим. наук Ю. В. Цеханскую, экспериментальные исследования которых способствовали проверке и развитию наших теоретических работ.

Подробное обсуждение работ по теории полярографических максимумов на семинаре Института физической химии Чехословацкой академии наук (Прага) было весьма ценным для меня.

Хотел бы выразить благодарность руководителю этого семинара акад. Р. Брдичке и всем его участникам, и в особенности д-ру Я. Коутецкому и д-ру Г. Корыта.

В подготовке книги ко второму изданию чрезвычайно большую помощь мне оказали научные сотрудники Р. Р. Догондзе и Ю. А. Чизмаджев. В этой работе приняли также участие канд. физ.-матем. наук Ю. Б. Иванов и В. А. Кирьянов, Б. С. Графов, Ю. И. Яламов, Е. Б. Брешенкова и В. Ю. Филиновский. Я с удовлетворением приношу всем им свою искреннюю благодарность.

В. Левич

Из предисловия к первому изданию

Для развития физической химии в последние десятилетия характерно широкое проникновение в нее физических методов исследования. К последним относятся, в частности, методы теоретической физики, которые находят все более широкое применение в разрешении разнообразных вопросов, находящихся на грани между физикой и химией.

В настоящей монографии, посвященной вопросам физико-химической гидродинамики, расчетные методы теоретической физики использовались при рассмотрении некоторых физико-химических проблем, связанных с движением жидкой фазы.

Под физико-химической гидродинамикой мы понимаем совокупность вопросов, связанных как с влиянием движения жидкостей на химические или физико-химические превращения, так и с влиянием физико-химических факторов на движение жидкостей.

Главная цель книги — приведение в стройную систему положений физико-химической гидродинамики на основе наших работ, проводившихся в течение последних десяти лет в отделе электрохимии Института физической химии Академии наук СССР в тесном контакте с коллективом отдела.

Выражаю глубокую благодарность руководителю этого отдела академику А. Н. Фрумкину, а также моему учителю, академику Л. Д. Ландау, за многочисленные и исключительно ценные советы и указания в процессе ведения этих исследований и при создании настоящего труда. Считаю своим приятным долгом поблагодарить проф. Б. Н. Кабанова, проф. И. Н. Кузьминых и ст. научн. сотрудников Т. А. Крюкову, И. А. Багоцкую, А. В. Городецкую, Е. И. Попову, экспериментальные исследования которых способствовали развитию теории излагаемых ниже вопросов.

В. Левич

ГЛАВА I

Введение

§ 1. Уравнения гидродинамики

Данная книга имеет своей целью рассмотрение разнообразных задач физико-химической гидродинамики. Нам придется в дальнейшем широко пользоваться представлениями современной гидродинамики. В частности, мы должны будем использовать теорию вязких течений жидкости, теорию пограничного слоя, теорию турбулентности и т. п.

В рамках данной книги мы не имеем возможности достаточно подробно и систематически осветить все эти вопросы и будем предполагать, что читатель знаком с основами гидродинамики [1]. Более специальные вопросы гидродинамики будут излагаться в соответствующих разделах книги. Кроме того, для удобства ссылок и справочных целей мы приведем в этой главе краткий обзор основных положений современной гидродинамики.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с движением несжимаемых капельных жидкостей, а поэтому всегда считать плотность жидкости постоянной во времени и в пространстве.

Состояние движущейся несжимаемой жидкости полностью характеризуется заданием в каждой точке пространства в каждый момент времени значения четырех величин: трех компонент скорости жидкости \mathbf{v} и давления p . В несжимаемой жидкости скорость движения \mathbf{v} удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

выражающему закон сохранения вещества.

Три других уравнения, необходимых для определения искомых функций, представляют уравнения движения элемента жидкости. Если отнести уравнение движения к единице объема жидкости, то в векторном виде оно запишется так:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2), именуемое уравнением Навье–Стокса, в левой части содержит, очевидно, произведение массы единицы объема жидкости и его ускорения. В правой части уравнения (1.2) стоят силы, действующие на этот элемент жидкости. Вектор \mathbf{f} представляет объемную силу, действующую на элемент жидкости.

Примером объемной силы может служить сила тяжести. Градиент давления представляет объемную силу (взятую с обратным знаком), действующую на элемент жидкости, если само давление изменяется от точки к точке. Действительно, если выделить в жидкости некоторый объем, то сила, действующая на этот объем, равна интегралу

$$- \oint p d\mathbf{S},$$

где $d\mathbf{S}$ — элемент поверхности, и интеграл берется по поверхности, окружающей этот объем. Преобразуя поверхностный интеграл в объемный, находим:

$$- \oint p d\mathbf{S} = - \int \text{grad } p dv.$$

Последний интеграл представляет объемную силу, действующую на весь объем. Отсюда следует, что на единицу объема действует сила ($-\text{grad } p$). То обстоятельство, что в уравнения движения входит не само давление, а лишь его градиент, показывает, что значение давления в жидкости определено лишь с точностью до произвольной постоянной.

Член $\mu \Delta \mathbf{v}$, где μ — вязкость жидкости, учитывает действие вязких сил. Наличие у жидкости вязкости или внутреннего трения проявляется в переносе количества движения от тех мест, где жидкость движется с большей скоростью, к местам с меньшей скоростью. Иными словами, происходит увлечение слоев, движущихся с меньшей скоростью, слоями, движущимися с большей скоростью. Объемная сила $\mu \Delta \mathbf{v}$ возникает в жидкости, у которой этот перенос происходит по закону трения Ньютона и вязкие свойства которой характеризуются значением одной постоянной вязкости μ . Такие жидкости именуются нормальными, или ньютоновскими¹.

Нормальными жидкостями являются вода и водные растворы неорганических и многих органических веществ, ряд органических жидкостей (спирты, углеводороды, жидкие металлы, глицерин, некоторые смолы и стекла и ряд других жидкостей), а также все газы.

Вязкость μ различных жидкостей имеет значения, различающиеся в необычайно широких пределах. Некоторые значения μ приведены в таблице 1.

Несмотря на столь различные значения μ , в указанных жидкостях строго соблюдается закон трения Ньютона. Существует, однако, широкий класс жидкостей, для которых закон трения Ньютона неприменим. Такие жидкости именуют обычно неньютоновскими, или аномальными.

В рамках этой книги мы не будем рассматривать свойства неньютоновских жидкостей, хотя их изучение, несомненно, составляет одну из задач физико-химической гидродинамики. К сожалению, до настоящего времени не существует сколько-нибудь обоснованных теоретических представлений в области течения

¹Следует подчеркнуть, что вязкие свойства ньютоновской сжимаемой жидкости характеризуются двумя постоянными: вязкостью μ и второй вязкостью ζ , входящей в уравнение движения как коэффициент при члене, содержащем дивергенцию скорости. В несжимаемой жидкости $\text{div } \mathbf{v} = 0$, и этот член не входит в уравнения движения, а вторая вязкость не проявляется.

Таблица 1

Вещество	Вязкость μ при 20 °C	Кинематическая вязкость $\nu = \frac{\mu}{\rho}$
Вода	0,010	0,010
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-4}$	0,150
Ртуть	0,0156	0,0012
Глицерин	8,5	6,8

неньютоновских жидкостей. Весьма значительное число теоретических исследований в этой области не привело пока к созданию последовательной количественной гидродинамики неньютоновских жидкостей.

Записав подробнее ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ и учитывая, что плотность жидкости постоянна, мы можем представить выражение (1.2) как

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad})\mathbf{v} = -\text{grad} \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho}, \quad (1.3)$$

или в координатном виде:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{f_i}{\rho}. \quad (1.3')$$

В уравнении (1.3'), как и всюду в дальнейшем, предполагается, что по индексам, встречающимся дважды, производится суммирование (в данном случае суммирование ведется по индексу k , пробегаящему значения 1, 2, 3).

Величина ν , равная

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ [см}^2\text{/с]},$$

носит название кинематической вязкости жидкости.

Если отвлечься от f_i , то уравнения Навье–Стокса можно выразить в другом, более наглядном виде. Для этого заметим, что, учитывая (1.1), можно (1.3') переписать в виде

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-p \delta_{ik} + \rho v_i v_k + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right], \quad (1.4)$$

где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$

Чтобы убедиться в тождественности выражений (1.4) и (1.3'), заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (v_i v_k) = v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

и

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0,$$

поскольку уравнение (1.1), написанное в компонентах, имеет вид

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

Если обозначить выражение, стоящее в квадратных скобках в уравнении (1.4), через p_{ik} :

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + \rho v_i v_k + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (1.5)$$

то получим:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.6)$$

Величина p_{ik} носит название тензора напряжений. Очевидно, что $p_{ik} = -p\delta_{ik} + \rho v_i v_k + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$ представляет собой совокупность девяти величин: p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , p_{xy} , p_{yz} и т. д.

По самому определению тензора напряжений в изотропной среде ясно, что он является симметричным тензором, т. е.

$$p_{ik} = p_{ki}.$$

Действительно, например,

$$p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \rho v_x v_y = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \rho v_y v_x = p_{yx}. \quad (1.7)$$

В силу этого из девяти величин p_{ik} лишь шесть имеют независимые значения.

Чтобы выяснить смысл тензора p_{ik} , проинтегрируем (1.6) по некоторому произвольному объему и применим теорему Гаусса–Остроградского к правой части уравнения. Заметим, что, поскольку по индексу k производится суммирование, в правой части выражения (1.6) стоит дивергенция

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\rho v_i) dv = \int \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} dv = \oint p_{ik} ds_k. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8), следовательно, характеризует изменение импульса, которым обладает жидкость в некотором объеме. Изменение импульса в объеме равно потоку импульса, который вытекает через поверхность, ограничивающую этот объем. Таким образом, p_{ik} представляет поток импульса. Например, компонент p_{xy} есть не что иное, как x -й компонент потока импульса, вытекающего через грань поверхности, перпендикулярную к оси y :

$$p_{xy} = (\rho v_x) v_y + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right).$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения представляет компонент потока импульса, связанного с механическим перемещением элемента объема жидкости через площадку, перпендикулярную к оси y . Второе слагаемое выражает поток импульса, возникающий вследствие наличия у жидкости вязкости. Вязкие свойства жидкости обеспечивают перенос количества движения от мест с большей скоростью к местам с меньшей скоростью.

Система уравнений движения (1.1) и (1.2) должна быть дополнена системой граничных условий.

Многочисленные экспериментальные исследования позволили установить, что при течении капельных ньютоновских жидкостей вдоль смачиваемой ими поверхности твердого тела имеет место неподвижность слоя жидкости, непосредственно прилегающего к поверхности, или, как часто говорят, слип жидкости с твердой поверхностью. Измерения скоростей показали, что толщина неподвижного слоя жидкости весьма мала: она составляет несколько молекулярных слоев (см. § 132). Тем не менее отсутствие скольжения вдоль поверхности весьма существенно для течения жидкости в целом. Аналогичное явление имеет место и в газах, если плотность их достаточно велика.

Таким образом, можно считать, что на всех твердых поверхностях, с которыми граничит движущаяся жидкость, выполнено граничное условие

$$\mathbf{v} = 0. \quad (1.9)$$

При этом на единицу поверхности твердого тела со стороны жидкости действует сила, равная потоку импульса, проходящему через эту поверхность.

На границе раздела подвижных фаз — двух несмешивающихся жидкостей или жидкости и газа — скорость не должна обращаться в нуль, но выполняются следующие условия:

1) тангенциальная слагающая скорости v_t непрерывна:

$$v_t^{(1)} = v_t^{(2)}; \quad (1.10)$$

2) нормальная слагающая скорости обращается в нуль:

$$v_n^{(1)} = v_n^{(2)} = 0; \quad (1.11)$$

3) равны друг другу и противоположны по направлению силы, с которыми жидкости действуют друг на друга, т. е.

$$F_n^{(1)} = F_n^{(2)}, \quad (1.12)$$

$$F_t^{(1)} = F_t^{(2)}, \quad (1.13)$$

где индексы 1 и 2 относятся к разным жидкостям. В частности, на свободной поверхности жидкости касательный компонент силы обращается в нуль:

$$F_t = 0. \quad (1.14)$$

При движении вязкой жидкости в ней происходит диссипация энергии. Вычисление [2] показывает, что энергия, диссипируемая в единице объема, выражается формулой

$$\begin{aligned}
 -\frac{dE}{dt} &= \int \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV = \\
 &= \mu \left[-\int (\text{rot } \mathbf{v})^2 dV + \int \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial n} ds - 2 \int [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] \mathbf{n} ds \right]. \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

С математической точки зрения решение системы уравнений гидромеханики, являющихся нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными, представляет значительные трудности. Поэтому общее решение их удастся получить только в исключительных случаях. Такие уравнения, как правило, стремятся упростить, после чего отыскивают приближенные решения упрощенной системы.

§ 2. Подобие гидродинамических явлений

В гидродинамике и смежных с ней дисциплинах, особенно в теории теплопередачи, широкое распространение получили также методы теории размерностей и теории подобия.

Здесь мы ограничимся лишь изложением наиболее простых положений гидродинамической теории подобия.

Заметим лишь, что методы теории подобия и теории размерностей, представляющие научную основу моделирования физических явлений, используются не только в теоретических исследованиях, но и в технике. Особенно широкое развитие они получили в СССР.

Отсылая читателя к ряду оригинальных работ и монографий, посвященных теории подобия [3], мы ограничимся лишь нахождением условий подобия гидродинамических течений, поскольку они будут широко использоваться нами в дальнейшем.

Некоторые, более специальные, вопросы теории подобия гетерогенных химических реакций будут разобраны в § 19.

Рассмотрим течение вязкой жидкости и установим необходимые и достаточные условия подобия двух течений. Для установления условий подобия двух процессов необходимо привести уравнения течения к безразмерному виду. Для этого все размерные переменные величины, входящие в уравнения гидродинамики, следует определять в частях некоторого характерного для них масштаба. Пусть, например, поток жидкости обтекает тело, которое можно охарактеризовать размером l , или этот поток течет внутри трубы, радиус которой равен l . Тогда размер обтекаемого тела или радиус трубы будет характеризовать масштаб области, в которой происходит движение жидкости. Все линейные размеры

будем измерять в безразмерных величинах $X_i = \frac{x_i}{l}$. Аналогично: пусть U_0 представляет скорость потока, набегающего на тело или втекающего в трубу. Скорость U_0 представляет некоторую характерную скорость движения и должна быть выбрана за масштаб скорости. Будем выражать скорости в безразмерных величинах $V_i = \frac{v_i}{U_0}$. Тогда уравнения Навье–Стокса для стационарного течения несжимаемой жидкости можно записать в виде

$$\frac{U_0^2}{l} V_k \frac{\partial V_i}{\partial X_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X_i} \frac{1}{l} + \nu \frac{U_0}{l^2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial X_k^2}, \quad (2.1)$$

или

$$V_k \frac{\partial V_i}{\partial X_k} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\nu}{U_0 l} \frac{\partial^2 V_i}{\partial X_k^2}, \quad (2.2)$$

где $P = \frac{p}{\rho U_0^2}$ — безразмерное давление.

В преобразованное к безразмерному виду уравнение (1.2) входит один безразмерный параметр, именуемый числом Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{U_0 l}{\nu}.$$

Вводя это обозначение, можно переписать уравнение (2.2) в виде

$$V_k \frac{\partial V_i}{\partial X_k} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V_i}{\partial X_k^2}. \quad (2.3)$$

Для полноты к (2.3) должно быть добавлено уравнение непрерывности

$$\frac{\partial V_k}{\partial X_k} = 0. \quad (2.4)$$

Однозначное решение любой гидродинамической задачи требует, помимо уравнений (2.3) и (2.4), задания системы граничных условий на поверхностях, ограничивающих объем, в котором происходит движение жидкости.

Рассмотрим два потока жидкости, движущихся в геометрически подобных областях (т. е. таких областях, которые могут быть преобразованы друг в друга одним лишь изменением линейного масштаба).

Пусть задана тождественная для обоих потоков система граничных условий и пусть оба потока характеризуются одинаковым значением числа Рейнольдса. Тогда безразмерные уравнения движения обоих потоков будут совершенно тождественны, а потоки полностью подобны друг другу в геометрическом и динамическом отношении. Таким образом, условие геометрического подобия, тождественность граничных условий и равенство чисел Рейнольдса, является необходимым и достаточным условием подобия двух течений. В виде примера можно

указать на обтекание шаров радиусов R_1 и R_2 двумя потоками одной и той же жидкости с различными скоростями U_1 и U_2 такими, что $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_2}{R_1}$, или обтекание одинаковых шаров различными жидкостями с разными скоростями, так что выполнено равенство $\frac{U_1}{\nu_1} = \frac{U_2}{\nu_2}$. Критерий (число) Рейнольдса составлен из величин U_0 , l и ν , задаваемых по произволу; вязкость представляет константу жидкости, характерные скорость и размер могут иметь любые, не связанные между собой значения, определяемые граничными условиями. Безразмерные критерии, подобные числу Рейнольдса, составленные из произвольно задаваемых величин, носят название определяющих критериев. Любые другие безразмерные величины, характеризующие текущую жидкость, являются функциями определяющих критериев. Поэтому всякая гидродинамическая величина может быть представлена как функция определяющих критериев и безразмерных величин. Например, скорость жидкости можно выразить следующим образом:

$$V_i = \frac{v_i}{U_0} = f\left(\text{Re}, \frac{x_i}{l}\right).$$

При стационарном течении несжимаемой жидкости имеется только один определяющий критерий — число Рейнольдса. Все другие величины являются функциями числа Рейнольдса. Так, например, безразмерная сила трения, действующая на 1 см^2 обтекаемой поверхности, равна

$$\tau = f(\text{Re}).$$

В более сложных случаях при нестационарном течении или течении при наличии внешнего поля объемных сил и т. п. наряду с числом Рейнольдса появляются другие определяющие критерии. В этом случае течения подобны, если подобны геометрические условия, тождественны начальные и граничные условия, а все определяющие критерии имеют одинаковое числовое значение.

Мы не будем рассматривать эти более сложные случаи и ограничимся стационарным потоком несжимаемой жидкости. В этом случае режим течения определяется значением критерия Рейнольдса.

§ 3. Движение жидкости при больших числах Рейнольдса. Пограничный слой

Наиболее распространенным на практике случаем движения жидкости является ее движение при больших числах Рейнольдса.

При $\text{Re} \gg 1$ последним членом в уравнении (2.3) можно пренебречь, если только по каким-либо причинам производная $\frac{\partial^2 V_i}{\partial X_k^2}$ не имеет особенно больших значений.

Опуская, как малый, последний член в (2.3), мы можем написать:

$$V_k \frac{\partial V_i}{\partial X_k} = - \frac{\partial P}{\partial X_i},$$

или, в размерных величинах,

$$v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} \right).$$

В общем случае нестационарного движения и при наличии внешних объемных сил имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \text{grad} \frac{p}{\rho} + \mathbf{f} \cdot \frac{1}{\rho}. \quad (3.1)$$

В уравнении (3.1) мы пренебрегаем вязкостью. Это означает, что при больших числах Рейнольдса вязкие силы малы и играют второстепенную роль.

Жидкость, не имеющую вязкости, именуют обычно идеальной. Уравнение (3.1), выражающее закон движения идеальной жидкости, называется уравнением Эйлера.

Пренебрежение членом, содержащим вязкость, и переход от уравнения Навье–Стокса к уравнению Эйлера представляет весьма существенное упрощение. Уравнение Эйлера — первого порядка, а не второго, как уравнение Навье–Стокса. Его интегрирование в ряде случаев может быть проведено в самом общем виде.

В случае стационарного движения под действием внешних сил \mathbf{f} , имеющих потенциальный характер, так что $\mathbf{f} = - \text{grad} U$, уравнение Эйлера можно переписать в виде

$$(\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} = - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho} \right). \quad (3.2)$$

Для интегрирования уравнения (3.2) введем понятие линии тока. Под линией тока понимают кривую, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором скорости жидкости. При стационарном течении линии тока представляют траектории жидких частиц. Воспользовавшись тождеством

$$\text{grad} \frac{v^2}{2} = (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} + [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]$$

и заметив, что вектор $[\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]$ перпендикулярен к вектору скорости \mathbf{v} , мы можем выразить проекцию уравнения (3.2) на произвольную линию тока l :

$$\left(\text{grad} \frac{v^2}{2} \right)_l = - \left[\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho} \right) \right]_l,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho} \right) = 0,$$

откуда (на данной линии тока)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho} = \text{const.} \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) носит название интеграла Бернулли. Он представляет общий интеграл уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости. Этот интеграл до известной степени аналогичен интегралу энергии обычной механики. Интеграл Бернулли показывает, что при переходе от мест с большей скоростью течения к местам с меньшей скоростью давление в жидкости изменяется в противоположном направлении.

Поскольку в отличие от уравнений Навье–Стокса уравнения Эйлера представляют дифференциальные уравнения первого порядка, в идеальной жидкости должны быть изменены граничные условия; например, обращение в нуль всех компонентов скорости жидкости на твердой поверхности является требованием, несовместимым с уравнениями Эйлера. В идеальной жидкости, не взаимодействующей с твердым телом из-за отсутствия вязкости, тангенциальная слагающая скорости не может быть подвергнута каким-либо ограничениям, и на поверхности твердого тела должна обращаться в нуль только нормальная слагающая скорости:

$$v_n = 0 \quad (\text{на поверхности твердого тела}).$$

Из уравнений Эйлера может быть сделан еще и другой важный вывод: в идеальной жидкости имеет место закон сохранения циркуляции скорости вдоль некоторого замкнутого контура, движущегося вместе с жидкостью,

$$\oint \mathbf{v} \, d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{v} \, ds = \text{const.}$$

Из этого следует, что если на данной линии тока в начальный момент времени $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, то движение на этой линии тока будет оставаться безвихревым и в дальнейшем. В частности, безвихревым является любое движение идеальной жидкости, начавшееся из состояния покоя. (Это справедливо для баротропных жидкостей, для которых $\rho = \Phi(p)$.)

Движение жидкости, в каждой точке которой ротор скорости равен нулю, называется потенциальным.

При потенциальном движении скорость жидкости всегда может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi, \quad (3.4)$$

где φ — некоторая функция координат и времени, именуемая потенциалом скорости. При таком представлении скорости условие $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ выполняется автоматически.

Подставляя (3.4) в уравнение непрерывности (1.1), находим, что потенциал скорости должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.5)$$

Граничным условием, которому должен удовлетворять потенциал на поверхности твердых тел, ограничивающих область движения жидкости, служит условие

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

(на поверхности твердого тела); здесь n — нормаль к поверхности.

Потенциал скорости, а следовательно, и распределение скорости в идеальной жидкости можно найти из решения хорошо изученной в математической физике краевой задачи.

Распределение давления можно найти из уравнения Эйлера. Поскольку при потенциальном течении всюду в жидкости $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, можно написать:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \text{grad } \frac{v^2}{2}.$$

Тогда уравнение Эйлера приобретает вид

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho} \right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{U}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (3.6)$$

Дальнейшее существенное упрощение возникает при стационарном режиме движения, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ и

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{U}{\rho} = \text{const.} \quad (3.7)$$

В отличие от (3.3), в (3.7) постоянная имеет одно и то же значение на всех линиях тока в жидкости.

Из уравнения Бернулли (3.3) следует, что если идеальная жидкость обтекает твердое тело, то наибольшее давление будет достигаться в той точке, в которой скорость жидкости обращается в нуль (от действия поля тяжести мы отвлекаемся). Такая точка называется точкой набегающего потока или критической точкой.

В случае потенциального стационарного течения несжимаемой жидкости особенно просто выяснить условия, при которых можно считать жидкость несжимаемой. А именно, изменение плотности идеальной жидкости, поскольку в ней нет диссипации энергии, связанной с необратимыми процессами, всегда имеет адиабатический характер, т. е.

$$\delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \delta p,$$

где S — энтропия.

Из уравнения Бернулли (3.3) получаем, что изменение давления в жидкости связано с кинетической энергией жидкости соотношением

$$\delta p \sim \frac{\rho v^2}{2},$$

поскольку при стационарном движении $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

Известно, что скорость звука в жидкости равна

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

Поэтому

$$\delta p \sim \frac{\rho v^2}{c^2},$$

или

$$\frac{\delta p}{\rho} \sim \frac{v^2}{c^2}.$$

Жидкость можно считать несжимаемой, если $\frac{\delta p}{\rho} \ll 1$. Это неравенство выполнено, если скорость жидкости v мала по сравнению со скоростью звука c в этой жидкости.

Таким образом, стационарное движение идеальной жидкости может быть охарактеризовано уравнениями движения, решение и исследование которых являются сравнительно простыми.

Однако приближение идеальной жидкости оказывается недостаточным для фактического изучения движения реальных жидкостей даже при очень больших числах Рейнольдса. Особенно наглядно это проявляется в существовании так называемого парадокса Даламбера. Парадокс Даламбера заключается в том, что сила сопротивления, испытываемая при стационарном движении твердого тела в идеальной жидкости, оказывается равной нулю.

Яснее всего это видно на примере сферы, равномерно движущейся в идеальной жидкости. Рассуждения, основанные на использовании уравнения Бернулли, показывают, что сила, действующая на переднюю полусферу, в точности компенсируется силой, действующей на заднюю полусферу.

Абсурдность этого результата показывает, что законы движения идеальной жидкости, в частности уравнение Бернулли, имеют ограниченную применимость. Оказывается, что влияние вязкости имеет весьма существенное значение в области, непосредственно прилегающей к поверхности твердого тела. Можно показать, что в этой области доказательство закона сохранения циркуляции теряет силу. Оказывается при этом, что уравнения движения идеальной жидкости допускают разрывные решения. Более того, эти решения становятся неоднозначными.

Приближение идеальной жидкости является неудовлетворительным при рассмотрении движения жидкости вблизи границы раздела фаз. В классической гидродинамике рассматривают обычно свойства течения вблизи твердой поверхности. В § 80 мы остановимся также и на свойствах течения вблизи границы раздела «жидкость – газ».

В реальной жидкости на поверхности твердого тела скорость течения должна обратиться в нуль. Между тем из законов движения идеальной жидкости, не накладывающих какого-либо ограничения на касательную слагающую скорости жидкости вблизи твердой поверхности, следует, что жидкость движется здесь со скоростью, сравнимой со скоростью течения вдали от твердой поверхности.

Таким образом, вблизи поверхности твердого тела должна существовать узкая область, в которой касательная слагающая скорости претерпевает весьма резкое изменение, от больших значений на внешней ее границе до нуля на поверхности твердого тела.

Этот тонкий слой жидкости получил название пограничного слоя. Все рассуждения предыдущего параграфа о малой величине вязких сил при течении жидкости с большими числами Рейнольдса неприменимы к пограничному слою.

Торможение жидкости в пограничном слое происходит исключительно благодаря вязким силам, играющим здесь основную роль. Математически это выражается в том, что в пограничном слое весьма велик градиент скорости в нормальном к стенке направлении, и вязкие члены в уравнениях Навье–Стокса, содержащие производные, в этом направлении велики, несмотря на малую вязкость жидкости.

Хотя пограничный слой занимает ничтожный объем, он играет весьма существенную роль в движении жидкости.

Явления, происходящие в пограничном слое, служат источником гидродинамического сопротивления при движении тел в жидкостях. Пограничный слой имеет очень большое значение и для ряда вопросов физико-химической гидродинамики.

Уравнения движения жидкости в пограничном слое допускают существенное упрощение. А именно, в тонком пограничном слое быстрота изменения всех величин в направлении, перпендикулярном к стенке, велика по сравнению с быстротой их изменения в тангенциальном направлении.

Кроме того, на достаточно малом участке тела течение в пограничном слое можно считать плоским (разумеется, если размеры тела велики по сравнению с толщиной пограничного слоя).

Рассмотрим плоское стационарное течение жидкости, направив ось y перпендикулярно к поверхности тела и ось x вдоль поверхности в направлении течения.

Уравнения движения (1.1) и (1.2) в компонентах для стационарного движения приобретают вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (3.8)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (3.10)$$

Если обозначить через δ_0 толщину пограничного слоя и через l размеры тела, то можно считать, что изменение скорости по оси y происходит на расстояниях порядка δ_0 , а вдоль оси x — на расстояниях порядка l .

Всю область движения можно приближенно разбить на две: область невязкого движения и область пограничного слоя, в которой вязкость играет существенную роль.

В первой области в уравнениях Навье–Стокса можно отбросить члены с вязкостью, заменив их уравнениями Эйлера.

Внутри пограничного слоя для упрощения уравнений Навье–Стокса можно воспользоваться тем, что пограничный слой имеет толщину, весьма малую по сравнению с его протяженностью вдоль тела. Введем в уравнениях (3.8)–(3.10) безразмерные координаты, написав

$$x = lX, \quad y = \delta_0 Y. \quad (3.11)$$

Определенные таким образом безразмерные координаты изменяются в пределах

$$0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1. \quad (3.12)$$

В новых переменных уравнения (3.8)–(3.10) примут вид

$$\frac{v_x}{l} \frac{\partial v_x}{\partial X} + \frac{v_y}{\delta_0} \frac{\partial v_x}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\nu}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial X^2} + \frac{\nu}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial Y^2}, \quad (3.8')$$

$$\frac{v_x}{l} \frac{\partial v_y}{\partial X} + \frac{v_y}{\delta_0} \frac{\partial v_y}{\partial Y} = -\frac{1}{\rho \delta_0} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\nu}{l^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial X^2} + \frac{\nu}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial Y^2}, \quad (3.9')$$

$$\frac{1}{l} \frac{\partial v_x}{\partial X} + \frac{1}{\delta_0} \frac{\partial v_y}{\partial Y} = 0. \quad (3.10')$$

Сравним прежде всего порядки величин компонентов скоростей v_x и v_y .

Из (3.10') имеем:

$$v_y = -\frac{\delta_0}{l} \int_0^1 \frac{\partial v_x}{\partial X} dY. \quad (3.13)$$

Производная $\frac{\partial v_x}{\partial X}$ не имеет каких-либо особенностей, а ее интеграл в пределах от 0 до 1 имеет порядок самого v_x . Поэтому в пограничном слое

$$v_y \sim \frac{\delta_0}{l} v_x \ll v_x. \quad (3.14)$$

С помощью (3.14) можно оценить различные члены в уравнении (3.8). Заметим, что, поскольку изменение Y происходит в пределах (3.12), производные

$$\frac{\partial v_x}{\partial Y} \sim \frac{\partial^2 v_x}{\partial Y^2} \sim v_x.$$

Точно так же

$$\frac{\partial v_x}{\partial X} \sim \frac{\partial^2 v_x}{\partial X^2} \sim v_x.$$

Поэтому в правой части (3.8') можно пренебречь членом

$$\frac{\nu}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial X^2} \sim \frac{v_x}{l^2} \nu$$

по сравнению с членом

$$\frac{\nu}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial Y^2} \sim \frac{v_x}{\delta_0^2} \nu.$$

В левой части (3.8'), однако, оба члена имеют тот же порядок величины:

$$\frac{v_x}{l} \frac{\partial v_x}{\partial X} \sim \frac{v_x^2}{l},$$

в силу (3.14)

$$\frac{v_y}{\delta_0} \frac{\partial v_x}{\partial Y} \sim \frac{v_x v_y}{\delta_0} \sim \frac{v_x^2}{l}.$$

Поэтому уравнение (3.8) можно написать окончательно в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (3.15)$$

Толщину пограничного слоя δ_0 можно оценить из условия, чтобы все члены, оставленные в уравнении (3.15), были одного и того же порядка малости. Это дает:

$$\frac{v_x}{l} \frac{\partial v_x}{\partial X} \sim \frac{\nu}{\delta_0^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial Y^2}. \quad (3.16)$$

Если скорость v_x на внешней границе пограничного слоя достигает значения U_0 , то из (3.16) следует:

$$\frac{U_0}{l} \sim \frac{\nu}{\delta_0^2},$$

или

$$\delta_0 \sim \sqrt{\frac{\nu l}{U_0}} \sim \sqrt{\frac{l^2}{\text{Re}}} \sim \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (3.17)$$

Таким образом, δ_0 меньше размеров тела в отношении корня из числа Рейнольдса. При этом, разумеется, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\sqrt{\text{Re}} \gg 1$. Эта оценка подтверждается точным расчетом (см. ниже).

Нужно, однако, подчеркнуть, что понятие толщины пограничного слоя является условным. Переход от вязкого течения в пограничном слое к невязкому течению в основном потоке происходит плавно и постепенно. Толщина δ_0 представляет толщину той области, в которой происходит основное изменение скорости от нуля до U_0 .

Из (3.15) следует также, что производная

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{U_0^2}{l}. \quad (3.18)$$

Переходя к оценке членов, вводящих в уравнение (3.9), находим, что они имеют порядок величины $\frac{U_0^2 \delta_0}{l^2}$, т. е. меньше членов уравнения (3.8) в отношении $\frac{\delta_0}{l}$.

Отсюда следует, что градиент давления по нормали к поверхности, входящий в (3.9), равен

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\delta_0 U_0^2}{l^2}.$$

Сравнивая это с (3.18), мы видим, что

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\delta_0}{l} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Это означает, что градиент давления в направлении по нормали мал по сравнению с изменением давления вдоль поверхности. Поэтому с точностью до членов второго порядка малости вместо (3.9) можно написать:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.19)$$

Уравнение (3.19) показывает, что в весьма тонком пограничном слое давление не успевает измениться в нормальном направлении и остается равным давлению вне пограничного слоя. Поэтому изменение давления p с координатой x в пограничном слое определяется характером изменения его вне пограничного слоя. Последний определяется интегралом Бернулли.

Уравнения пограничного слоя допускают точное решение для случая обтекания полубесконечной пластинки, на передний край которой набегаёт поток жидкости, движущийся со скоростью U_0 (рис. 1).

Для нахождения решения уравнений (3.15) и (3.19) при граничных условиях

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad (3.20)$$

$$v_x \rightarrow U_0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (\text{вне пограничного слоя}) \quad (3.21)$$

заметим прежде всего, что скорость во внешнем потоке имеет постоянное значение. Из интеграла Бернулли следует, что и давление во внешнем потоке имеет постоянное значение. Благодаря этому в выражении (3.15) можно опустить член с градиентом давления, переписав уравнение в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (3.22)$$

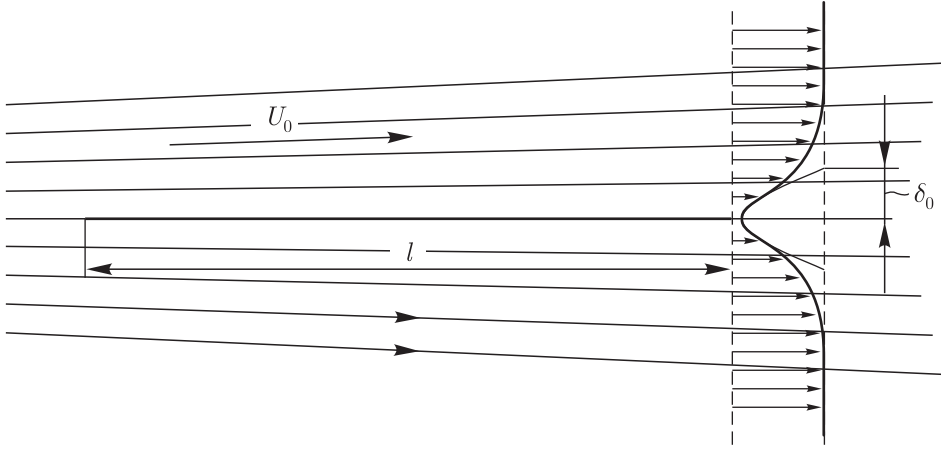


Рис. 1. Обтекание пластинки

Для нахождения распределения скоростей v_x и v_y в пограничном слое, удовлетворяющих уравнению непрерывности (3.10), удобно ввести функцию тока ψ , определяемую соотношением

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (3.23)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.24)$$

При этом уравнение (3.10) обращается в тождество.

Уравнения (3.10) и (3.22) и граничные условия не содержат никакого характерного параметра, имеющего размерность длины. Отсюда следует, что в уравнении (3.22) целесообразно перейти к новой безразмерной переменной

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \cdot y. \quad (3.25)$$

Будем искать функцию тока ψ в виде

$$\psi = \sqrt{\nu U_0 x} \cdot f(\eta). \quad (3.26)$$

При этом оказывается, что $f(\eta)$ удовлетворяет уравнению в полных производных. Имеем, очевидно,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{2} U_0 f'(\eta), \quad (3.27)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} (\eta f' - f), \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{4} \frac{U_0}{x} \eta f'', \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U_0}{4} \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} f'', \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{8} U_0 \frac{U_0}{\nu x} f'''. \quad (3.31)$$

Подставляя соответствующие величины в выражение (3.22), находим:

$$f''' + f'' f = 0. \quad (3.32)$$

Подстановка v_x и v_y в граничные условия (3.20) и (3.21) дает:

$$f = f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad (3.33)$$

$$f' = 2 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

Обозначая $f''(0) = \alpha$, можно получить решение уравнения (3.32) в виде [4]

$$f = \frac{\alpha \eta^2}{2!} - \frac{\alpha^2 \eta^5}{5!} + \frac{11 \alpha^3 \eta^8}{8!} + \dots \quad (3.35)$$

При больших значениях η ряд неудобен для пользования. В таких случаях предельное значение f , удовлетворяющее условию (3.34), получается численным интегрированием.

Путем численного интегрирования было найдено [4] значение

$$\alpha = 1,33.$$

Сила трения F_x , действующая на одну сторону пластинки, характеризуется выражением

$$F_x = \int_0^b \int_0^l \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_{y=0} dx dz = \frac{\alpha \rho U_0^2}{2} bl \sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}}, \quad (3.36)$$

где b — ширина пластинки.

Вместо силы сопротивления часто вводят так называемый коэффициент сопротивления, определяемый как

$$K_f = \frac{F_x}{\rho \frac{U_0^2}{2} \cdot bl} = \frac{\alpha}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (3.37)$$

Если определить толщину пограничного слоя δ_0 , как то расстояние от поверхности пластинки, на котором v_x достигает значения, равного 99 % скорости основного потока U_0 , то для δ_0 в результате численного расчета получается величина (рис. 2)

$$\delta_0 = 5,2 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}. \quad (3.38)$$

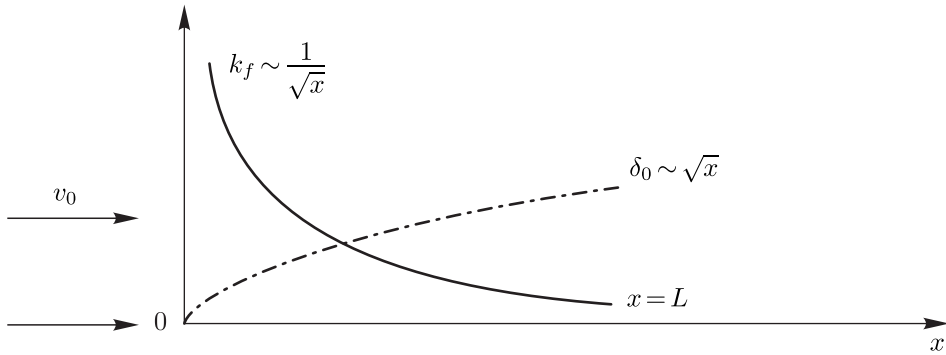


Рис. 2. Зависимость толщины пограничного слоя и напряжения трения от координаты x на пластинке

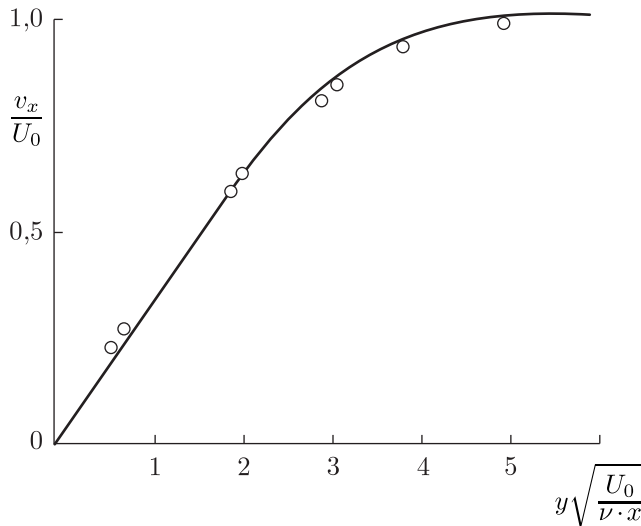


Рис. 3. Распределение касательной слагающей скорости в пограничном слое на пластинке. Крестиками обозначены экспериментальные точки

Качественно формулы, полученные для пластинки, применимы к произвольному телу, имеющему малую кривизну.

Выпишем еще в явном виде² распределение скоростей при $\eta \ll 1$ (рис. 3):

$$v_x = \frac{U_0}{2} \left(\alpha \eta - \frac{\alpha^2 \eta^4}{4!} + \dots \right) \approx \frac{1,33 U_0}{4} \sqrt{\frac{U_0 y^2}{\nu x}} \approx \frac{U_0 y}{\delta_0}, \quad (3.39)$$

$$v_y \approx \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{U_0 \nu}{x}} \eta^2 \approx \frac{\alpha}{16} \frac{U_0^{3/2} y^2}{\nu^{1/2} x^{3/2}} \approx \frac{\nu y^2}{\delta_0^3}. \quad (3.40)$$

²Было бы неправильно проверять выполнение неравенства $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$, подставляя в него разложение (3.39). Вблизи точки $y = 0$ поведение непрерывной функции v_x определяется граничным условием (3.20).